

Contraintes

Exercice 1 : *Petites rotations*

Une barre rigide homogène de longueur L est initialement alignée le long de l'axe x du repère cartésien (O, x, y) . La barre est ensuite tournée d'un angle fini θ autour de l'origine O , sans subir de déformation (la longueur de la barre reste constante). La nouvelle position de la barre est donc orientée à un angle θ par rapport à l'axe x .

1. Exprimez le champ de déplacement $\mathbf{u}(X)$ des points de la barre en fonction des positions matérielles initiales $\mathbf{X} = (X, Y)$ et de l'angle de rotation θ .
2. Calculez le gradient de déplacement $\nabla \mathbf{u}$, tenseur des petites déformations, le tenseur petite rotations. Montrez que, malgré l'absence de déformation réelle, le tenseur des petites déformations prédit des déformations non nulles pour cette rotation finie.
3. Analyser si, pour des valeurs infinitésimales de l'angle de rotation θ , la déformation est négligeable par rapport à la rotation.
4. Calculez le tenseur de Green-Lagrange $\mathbf{E}$. Est-ce que il y a des déformations?

Solution :

1. la rotation rigide de la barre est donnée par :

$$x = X \cos \theta - Y \sin \theta, \quad y = X \sin \theta + Y \cos \theta,$$

alors le déplacement s'écrit :

$$u = x - X = X(\cos \theta - 1) - Y \sin \theta \quad (1)$$

$$v = y - Y = X \sin \theta + Y(\cos \theta - 1) \quad (2)$$

- 2.

$$\nabla \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \cos \theta - 1 & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta - 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) = \begin{pmatrix} \cos \theta - 1 & 0 \\ 0 & \cos \theta - 1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} - \nabla \mathbf{u}^T) = \begin{pmatrix} 0 & -\sin \theta \\ \sin \theta & 0 \end{pmatrix} \quad (5)$$

3. Pour des petites angles $\cos \theta \approx 1 - \theta^2/2$ et $\sin \theta \approx \theta$, donc la déformation est plus petite que la rotation.
4. Le gradient de la transformation est

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (6)$$

ce qui signifie que $\mathbf{F}$ est une rotation et donc $\mathbf{F}^T \mathbf{F} = \mathbf{I}$. Donc $\mathbf{E} = (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I})/2 = \mathbf{0}$. Cet exemple montre que la déformation infinitésimale de Cauchy ne doit pas être utilisée en présence de rotations finies du milieu continu.

Exercice 2 : Compatibilité

1. Le déplacement $u_1 = \sin(x_1)$, $u_2 = x_1^2 x_2$, $u_3 = \cos(x_3)$ correspond-t-il à un champ de déformations compatibles ?
2. Soit la déformation $\varepsilon_{11} = \frac{1}{\alpha} f(x_2, x_3)$, $\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = -\frac{\nu}{\alpha} f(x_2, x_3)$ et $\varepsilon_{12} = \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0$. Montrer que pour que cette déformation soit compatible, $f(x_2, x_3)$ doit être linéaire.

Solution :

1. Le déplacement est continu et dérivable, on peut donc le dériver pour obtenir le champ de déformation compatible.
- 2.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} &= \frac{\partial^2 f(x_2, x_3)}{\alpha \partial x_2^2} = 0 \\ \Rightarrow f(x_2, x_3) &= a(x_3)x_2 + b(x_3) \end{aligned} \quad (7)$$

De même,

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{13}}{\partial x_1 \partial x_3} = 0 \Rightarrow f(x_2, x_3) = c(x_2)x_3 + d(x_2). \quad (8)$$

et,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2 \partial x_3} + \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} - \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} - \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_2} \right) &= 0 \\ \Rightarrow f(x_2, x_3) &= e(x_2) + g(x_3) \\ \Rightarrow a(x_3) &= a \quad \text{et} \quad c(x_2) = c \end{aligned} \quad (9)$$

On a donc $a x_2 = d(x_2) = e(x_2)$ et $b(x_3) = c x_3 = g(x_3)$, $f(x_2, x_3)$ doit donc être linéaire pour vérifier les conditions de compatibilités.

Exercice 3 :

Nous considérons un solide constitué d'un matériau élastique isotrope, dont la configuration de référence est sa forme d'équilibre à la température T_0 . On lui impose une température $T(\underline{x})$ où $\underline{x}$ est la position. On se place dans le cadre des transformations infinitésimales. Les déformations sont de la forme :

$$\varepsilon = \alpha (T(\underline{x}) - T_0) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (10)$$

1. A quelle condition sur le champ de température $T(\underline{x})$, le champ de déformation associé ε est-il géométriquement compatible ?
2. Le solide est désormais un cylindre de hauteur H et rayon R , avec $R < H$ (cf. figure 1).

On soumet le cylindre à un champ de température linéaire en x_3 tel que

- $T(x_3 = H) = T_0 + \Delta T$
- $T(x_3 = 0) = T_0$

Le cylindre est libre (il n'est soumis à aucune condition au bord en déplacement) et on élimine les mouvements de translation et de rotation du corps rigide. Calculer le champ de déplacement associé.

Indication : Les constantes d'intégration apparaissant dans les expressions de u_1 et u_2 ne dépendent pas de x_1 , x_2 ou x_3 . En revanche, la constante d'intégration de u_3 doit être calculée.

3. A quelle condition sur la température l'hypothèse des déformations infinitésimales est-elle justifiée ?

Solution :

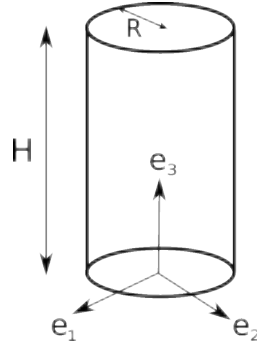


FIGURE 1 – Cylindre

1. Pour que ce champ de déformation soit compatible, il doit vérifier les conditions de compatibilité cinématique de Saint Venant (Lai/Rubin/Kreml p. 102) :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 T(\underline{x})}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2 T(\underline{x})}{\partial x_j^2} = 0 & \forall i \neq j \\ \frac{\partial^2 T(\underline{x})}{\partial x_i \partial x_j} = 0 & \forall i \neq j \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial^2 T(\underline{x})}{\partial x_i^2} = 0$$

En trois dimensions, ces relations impliquent que $T(\underline{x})$ soit linéaire : $T(\underline{x}) = ax_1 + bx_2 + cx_3$.

2. $\varepsilon = \alpha \Delta T \frac{x_3}{H} \mathbf{I}$. En intégrant ε_{11} , ε_{22} et ε_{33} , on a :

$$\begin{aligned} u_1 &= \alpha \Delta T \frac{x_1 x_3}{H} + f_1(x_2, x_3) \\ u_2 &= \alpha \Delta T \frac{x_2 x_3}{H} + f_2(x_1, x_3) \\ u_3 &= \alpha \Delta T \frac{x_3^2}{2H} + f_3(x_1, x_2) \end{aligned}$$

D'après l'indication de l'énoncé, on sait que f_1 et f_2 sont des constantes qui ne dépendent pas de x_1 , x_2 ou x_3 . Pour éliminer le mouvement du corps rigide, on a donc $f_1 = 0$ et $f_2 = 0$. Pour trouver f_3 on utilise $\varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0$:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{13} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) = \frac{1}{2} \left(\alpha \Delta T \frac{x_1}{H} + \frac{\partial f_3(x_1, x_2)}{\partial x_1} \right) = 0 \\ \Rightarrow \frac{\partial f_3(x_1, x_2)}{\partial x_1} &= -\alpha \Delta T \frac{x_1}{H} \\ \Rightarrow f_3(x_1, x_2) &= -\alpha \Delta T \frac{x_1^2}{2H} + a(x_2). \end{aligned}$$

De même pour $\varepsilon_{23} = 0$ on trouve :

$$f_3(x_1, x_2) = -\alpha \Delta T \frac{x_2^2}{2H} + b(x_1).$$

Par identification, on a :

$$\begin{aligned} a(x_2) &= -\alpha \Delta T \frac{x_2^2}{2H} \\ b(x_1) &= -\alpha \Delta T \frac{x_1^2}{2H} \end{aligned}$$

On obtient alors

$$\begin{aligned}u_1 &= \alpha \Delta T \frac{x_1 x_3}{H} \\u_2 &= \alpha \Delta T \frac{x_2 x_3}{H} \\u_3 &= \alpha \Delta T \frac{x_3^2 - x_1^2 - x_2^2}{2H}\end{aligned}$$

ou en coordonnées cylindriques $u_r = \alpha \Delta T \frac{r z}{H}$, $u_\theta = 0$ et $u_z = \alpha \Delta T \frac{z^2 - r^2}{2H}$, à un mouvement de solide rigide près.

3. Pour que l'hypothèse des déformations infinitésimales soit justifiées, il faut que $\|\nabla \mathbf{u}\| \ll 1$. Le gradient des déplacements en coordonnées cartésiennes est :

$$\nabla \mathbf{u} = \frac{\alpha \Delta T}{H} \begin{bmatrix} x_3 & 0 & x_1 \\ 0 & x_3 & x_2 \\ -x_1 & -x_2 & x_3 \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Il faut donc que chaque composante du tenseur soit inférieure à 1. Comme le cylindre est plus haut que large ($H > R$), les termes maximums sont les termes diagonaux quand $x_3 = H$. Il faut donc :

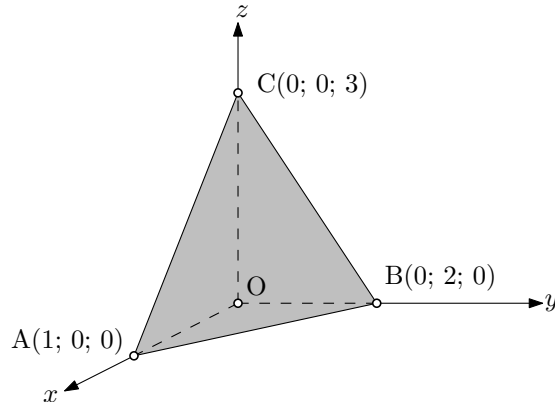
$$\frac{\alpha \Delta T x_3}{H} \ll 1 \quad \Rightarrow \quad \alpha \Delta T \ll 1. \quad (12)$$

Exercice 4 : Composantes du vecteur contrainte

La matrice représentant le tenseur contrainte au point O d'un solide vaut

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} [\text{N/mm}^2]$$

Trouver les composantes du vecteur contrainte agissant en O sur un plan parallèle au plan ABC :



Solution :

Le vecteur contrainte est donné par $\underline{f} = \underline{\sigma} \underline{n}$, et d'une manière générale le vecteur unitaire normal au plan ABC $\underline{n}$ peut être posé comme

$$\underline{n} = \frac{\overline{\text{AB}} \times \overline{\text{AC}}}{\|\overline{\text{AB}} \times \overline{\text{AC}}\|}.$$

Ici l'équation du plan est obtenue directement : $x + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1$, le vecteur $\underline{n}$ est donc colinéaire à $[1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}]$ (penser à le normer).

Finalement, on obtient

$$\underline{f} = \left[\frac{6}{7}, -\frac{1}{7}, 1 \right].$$

Exercice 5 : Conservation de la masse

Étant donné le champ de vitesse suivant en coordonnées cylindriques :

$$\mathbf{v}(r, \theta, z) = f(r, \theta) \mathbf{e}_r,$$

à partir du principe de conservation de la masse pour un matériau incompressible, déterminer la forme la plus générale de la fonction $f(r, \theta, z)$ qui satisfait cette équation.

Solution : Pour un matériau incompressible, la vitesse doit satisfaire l'équation de divergence nulle :

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \implies \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rv_r) = 0 \implies rv_r = \text{constante} \implies f(r, \theta) = \frac{1}{r}g(\theta). \quad (13)$$

Le champ de vitesse radiale v_r doit varier selon $1/r$ pour satisfaire la condition de divergence nulle en coordonnées cylindriques pour un écoulement incompressible.

Exercice 6 :

Les composantes cartésiennes du tenseur contraintes σ_{ij} au point 0 d'un solide sont

$$\begin{bmatrix} -4 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -1 & 3 \\ -\sqrt{2} & 3 & -1 \end{bmatrix} [\text{N/mm}^2]$$

Trouver

1. les contraintes normales principales,
2. la matrice des cosinus directeurs des axes principaux,
3. la contrainte normale moyenne,
4. le tenseur déviateur,
5. la contrainte tangentielle maximale

Solution :

1) Les contraintes normales principales sont les valeurs propres de la matrice de contraintes.

$$\det[\sigma_{ij} - \lambda \delta_{ij}] = \det(\underline{\sigma} - \lambda \underline{I}) = 0$$

pour notre tenseur de contraintes on a

$$\begin{vmatrix} \sigma_{11} - \lambda & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \lambda & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 - \lambda & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -1 - \lambda & 3 \\ -\sqrt{2} & 3 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

on obtient le polynôme :

$$-\lambda^3 - 6\lambda^2 + 4\lambda + 24 = (-\lambda^2 + 4)(\lambda + 6) = (\lambda + 2)(-\lambda + 2)(\lambda + 6) = 0$$

par conséquent les contraintes normales principales sont

$$\sigma_I = 2 \text{ N/m}^2, \quad \sigma_{II} = -2 \text{ N/m}^2, \quad \sigma_{III} = -6 \text{ N/m}^2, \quad \sigma_I > \sigma_{II} > \sigma_{III}$$

2) Pour trouver la matrice des cosinus directeurs des axes principaux, on calcule les vecteurs propres du tenseur des contraintes :

$$(\sigma_{ij} - \delta_{ij}\lambda)n_i = 0 \quad \text{avec} \quad n_i n_i = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$$

où λ est une valeur propre et n_i le vecteur des cosinus directeurs correspondant. Pour $\lambda = \sigma_I = 2$ on obtient

$$\begin{aligned} -6n_1 + \sqrt{2}n_2 - \sqrt{2}n_3 &= 0 & n_1 &= \frac{1}{6}(\sqrt{2}n_2 - \sqrt{2}n_3) \\ \sqrt{2}n_1 - 3n_2 + 3n_3 &= 0 & \Rightarrow & n_2 = n_3 \\ -\sqrt{2}n_1 + 3n_2 - 3n_3 &= 0 & n_1 &= 0 \end{aligned}$$

et en utilisant $n_i n_i = 1$ on trouve que :

$$\underline{n}_I = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

pour $\lambda = \sigma_{II} = -2$ on obtient

$$\begin{aligned} -2n_1 + \sqrt{2}n_2 - \sqrt{2}n_3 &= 0 & -\sqrt{2}n_1 &= -n_2 + n_3 \\ \sqrt{2}n_1 + n_2 + 3n_3 &= 0 & \Rightarrow & n_2 = -n_3 \\ -\sqrt{2}n_1 + 3n_2 + n_3 &= 0 & n_1 &= \sqrt{2}n_2 \end{aligned}$$

et en utilisant $n_i n_i = 1$ on trouve que :

$$\underline{n}_{II} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

pour $\lambda = \sigma_{III} = -6$ on obtient

$$\begin{aligned} 2n_1 + \sqrt{2}n_2 - \sqrt{2}n_3 &= 0 & \sqrt{2}n_1 &= -n_2 + n_3 \\ \sqrt{2}n_1 + 5n_2 + 3n_3 &= 0 & \Rightarrow & n_2 = -n_3 \\ -\sqrt{2}n_1 + 3n_2 + 5n_3 &= 0 & n_1 &= -\sqrt{2}n_2 \end{aligned}$$

et en utilisant $n_i n_i = 1$ on trouve que :

$$\underline{n}_{III} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Finalement, la matrice des cosinus directeurs des axes principaux devient

$$\begin{bmatrix} n_I & n_{II} & n_{III} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -1 & -1 \\ \sqrt{2} & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

3) La contrainte normale moyenne est déterminée par

$$\sigma_o = \frac{1}{3}\sigma_{ii} = \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) = \frac{1}{3}(\sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III})$$

Dans notre cas, on obtient

$$\sigma_o = \frac{1}{3}(\sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III}) = -2 \text{ N/m}^2$$

4) Le tenseur déviateur des contraintes s_{ij} est déterminé par

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_o \delta_{ij}$$

où σ_o représente la contrainte normale moyenne déterminée précédemment. Le déviateur devient

$$[s_{ij}] = [\sigma_{ij} - \sigma_o \delta_{ij}] = \begin{bmatrix} -2 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 & 3 \\ -\sqrt{2} & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad [\text{N/m}^2]$$

5) Après avoir déterminé les contraintes normales principales, on détermine la contrainte tangentielle maximale par

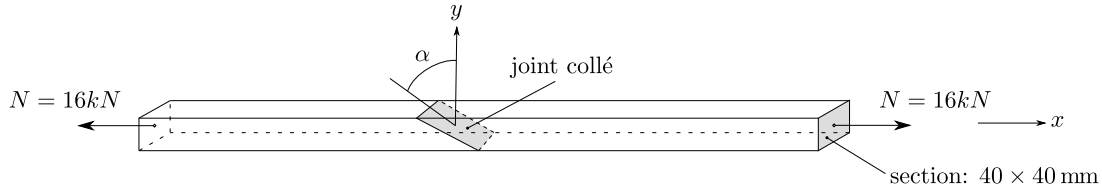
$$\tau_{\max} = \pm \frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2}$$

On obtient

$$\tau_{\max} = \pm 4 \text{ N/m}^2$$

Exercice 7 :

Un barreau de section carrée $40 \text{ mm} \times 40 \text{ mm}$ est soumis à une force de traction $N = 16 \text{ kN}$. Déterminer analytiquement, l'orientation α que l'on doit donner à un joint collé pour que la contrainte de traction n'y excède pas 2 N/mm^2 ; quelle est alors la contrainte tangentielle dans le joint ?



Solution :

Tout d'abord, on doit évaluer le tenseur des contraintes dans la base initiale liée à la barre :

$$\sigma_x = \frac{16000 \text{ N}}{40 \text{ mm} \cdot 40 \text{ mm}} = \frac{16000 \text{ N}}{1600 \text{ mm}^2} = 10 \text{ N/mm}^2, \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = 0$$

On remarque qu'on est déjà dans la base des contraintes principales, on a donc les contraintes principales égales à :

$$\sigma_1 = 10 \text{ N/mm}^2, \quad \sigma_2 = 0$$

Pour trouver l'orientation α que l'on doit donner à un joint collé pour que la contrainte de traction n'excède pas 2 N/mm^2 , on exprime le tenseur des contraintes dans une base d'orientation quelconque d'angle α par :

$$\boldsymbol{\sigma}' = \mathbf{c} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{c}^T$$

ce qui donne :

$$\boldsymbol{\sigma}' = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 \cos^2 \alpha & -\sigma_1 \cos \alpha \sin \alpha \\ -\sigma_1 \cos \alpha \sin \alpha & \sigma_1 \sin^2 \alpha \end{bmatrix}$$

par conséquent,

$$\begin{bmatrix} \sigma' \\ \tau' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 \cos^2 \alpha \\ -\sigma_1 \cos \alpha \sin \alpha \end{bmatrix}$$

pour $\sigma' = 2 \text{ N/mm}^2$ on obtient que $\alpha = \pm 63.43^\circ$ et $\tau' = \pm 4.0 \text{ N/mm}^2$

(Ou simplement $\sigma' = \underline{n}^t \boldsymbol{\sigma} \underline{n}$ avec $\underline{n} = \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{bmatrix}$ le vecteur normal à la surface, et $\tau' = \underline{t}^t \boldsymbol{\sigma} \underline{n}$ avec $\underline{t} = \begin{bmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{bmatrix}$ le vecteur tangent à la surface.)

Exercice 8 : Exercice 3, examen 2016

Dans cet exercice, on s'intéresse à une plaque rectangulaire trouée. Le trou est centré sur l'origine du repère et est de rayon a . La plaque est d'épaisseur h . La plaque est soumise à une contrainte uniaxiale statique $\sigma_{xx} = \text{constante} = p$ à ses extrémités.

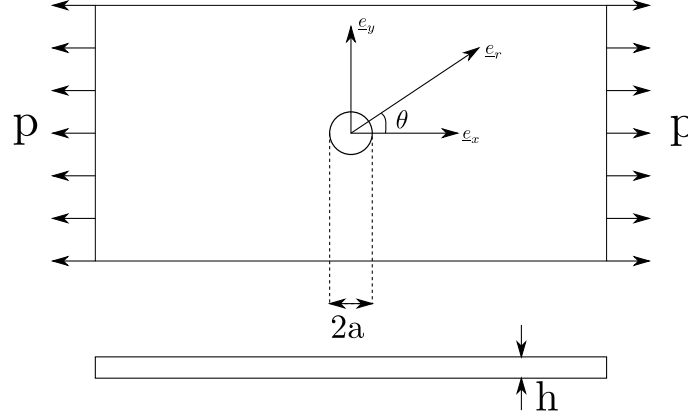
La solution pour un matériau élastique linéaire isotrope est connue :

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{p}{2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \left[1 + \left(1 - 3 \frac{a^2}{r^2} \right) \cos 2\theta \right] \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{p}{2} \left[1 + \frac{a^2}{r^2} - \left(1 + 3 \frac{a^4}{r^4} \right) \cos 2\theta \right] \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{p}{2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \left(1 + 3 \frac{a^2}{r^2} \right) \sin 2\theta \end{aligned} \tag{14}$$

1. Vérifier que cette solution satisfait les conditions aux limites en contraintes.
2. Quel est l'endroit où $\sigma_{\theta\theta}$ est maximale? Donner sa valeur.
3. Trouver où dans la plaque $\tau_{r\theta}$ est maximale, et donner sa valeur.

Pour la suite, nous ne considérons que l'état de contrainte au bord du trou ($r = a$).

4. Donner l'emplacement et la valeur de la contrainte maximale de cisaillement $\tau_{\max}$. Sur quel plan agit elle?
5. Quelle est la valeur du facteur d'intensité de contrainte $K = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{xx}}$?



Solution :

1. Sur le bord du trou, la structure est libre d'efforts. Ainsi, il faut vérifier que

$$\begin{aligned} \forall \theta, \underline{\sigma}(r = a)\underline{e}_r &= \underline{0} \\ \forall \theta, \sigma_{rr}(r = a) &= 0 \text{ et } \tau_{r\theta}(r = a) = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

C'est bien le cas puisque lorsque $r = a$ le facteur $\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)$ s'annule.

Il faut également vérifier les conditions aux limites en effort sur le périmètre de la plaque, c'est-à-dire loin du trou. Ainsi, lorsque r tend vers l'infini et que $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$, on a bien $\sigma_{rr} = p$.

2. On sait que $\cos 2\theta$ vaut -1 en $\theta = \frac{\pi}{2}$. Par conséquent, $\sigma_{\theta\theta}$ est maximum en $r = a$ et $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$ et vaut $3p$.
3. Cherchons l'endroit dans la plaque où $\tau_{r\theta}$ est maximum. $\sin 2\theta$ est maximum en $\theta = \frac{\pi}{4} + k\pi$ et le produit $\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)\left(1 + 3\frac{a^2}{r^2}\right)$ est maximum en $\frac{a^2}{r^2} = \frac{1}{3}$, c'est-à-dire en $r = a\sqrt{3}$. A ce moment, $\tau_{r\theta}(a\sqrt{3}, -\frac{\pi}{4} + k\pi) = \frac{2p}{3}$
4. A présent, on se place au bord du trou. Les champs de contraintes deviennent :

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= 0 \\ \sigma_{\theta\theta} &= p(1 - 2\cos 2\theta) \\ \tau_{r\theta} &= 0 \end{aligned} \quad (16)$$

Le cisaillement maximal est $\tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_I - \sigma_{II})$

$$\begin{aligned} \tau_{\max} &= \frac{1}{2}(\sigma_I - \sigma_{II}) \\ \tau_{\max} &= \frac{3p}{2} \end{aligned} \quad (17)$$

Elle agit sur le plan de normale $-\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\underline{e}_x + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\underline{e}_y$

5. La contrainte maximale σ_{max} est la contrainte calculée à la question 2. Ainsi

$$K = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{xx}} = \frac{\sigma_{\theta\theta}(a, \frac{\pi}{2})}{p} = 3 \quad (18)$$